De Principio Integrationis Functionum Differentialium, Unius Quantitatis Variabilis, Algebraicæ.

Disquisitio Mathematica,

Quam,

Consent. Ampliss. Ord. Philos. Lundens.

P. P.

P. S. MUNCK AF ROSENSCHÖLD,

Phys. Adj. Ord.

Respondente

RUDOLPHO HOLMBERG,

Smolando.

In Acad. Carol. Die XXIX Nov. MDCCCXLIII.

P. I.

LUNDÆ,

typis Berlingianis,

MDCCCXLIII.

Theses Respondentis.

I.

Qui putat, separatismum religionis externa vi optime exstingui posse, perversam ille fovet sententiam.

II.

Omnis Reformatio, si quid magni et duraturi efficiet, a junioribus, qui fingi possunt, initium capiat necesse est.

Omnis fere disquisitio mathematica, quæ integrationem functionum differentialium, unius quantitatis variabilis spectat, nostris quidem temporibus circa analysin et comparationem transcendentium, in calculo integrali vulgatissimarum, versatur. Jam enim ab initio observatum est, integralia sæpissime repræsentari per areas sectionum conicarum seu etiam arcus circulares atque logarithmos. Postea hæc doctrina multifariam amplificata, atque in transcendentes diversi generis extensa fuit. Nos quidem omnia hæc intacta reliquimus, et tantummodo in hoc opusculo de integratione *algebraica*, quæ etiam *absoluta* dicitur, disseremus. *) Speramus nos in sequentibus demonstraturos, aliquid novi in eo inveniri posse, quod jam diu est cognitum, et si vel novum non reperitur, methodos tamen simpliciores et elegantiores rem haud exigue proferre. Conemur igitur casus diversos determinare in quibus functio quædam differentialis, formæ determinatæ, modo algebraico integrari possit; ob abundantiam autem materiæ coacti sumus, ut tantummodo sic dictum *binomium*, *trinomium* atque *binomium dupplex*, quorum formæ generaliter expressæ sunt $x^m(a+bx^n)^p dx$, $x^m(a+bx^n+cx^{n'})^p dx$ et $x^m(a+bx^n)^p(f+gx^{n'})^q dx$ calculo subjiciamus. Quoniam successus hujus

*) Nuperrime hæc materies a cel. Liouville in opusculo "Sur la determination des Integrales dont la valeur est algebrique"; Journal de L'Ecole Polytechnique p. 124, tractata fuit. Liouville modo generaliori rem perpendit et maxime in eo incubuit, ut methodum reperiet, ex qua dijudicari possit num integrale functionis algebraicæ sit functio algebraica nec ne. In indagandis conditionibus integrabilitatis hanc methodum minus aptam invenimus. Etiam in eo a cel. Liouville discedimus, quod inter functiones algebraicas non modo mere algebraicas sed etiam quas Bernoulli interscendentes vocavit numeramus.

disquisitionis unicæ methodo, quam secuti sumus, tribuendus est, necesse est ut primum hanc explicemus, ex quo simul manifestum erit, totam integrationem algebraicam ex hoc principio deduci posse.

Jam illis, qui in calculo differentiali vel minimum versati sunt, notissima est formula, qua differentiale producti cujusdam duarum functionum exprimitur. Si igitur u et v sint hæ functiones erit:

$$d.uv = udv + vdu.$$

Jam si per du dividatur erit $v + \frac{udv}{du} = \frac{d.uv}{du}$, quæ quidem æquatio, si ponimus $dv = v'dx, du = u'dx, d.uv = dy = y'dx$, existente x quantitate variabili, mutatur in

$$v + \frac{u}{u'}v' = \frac{y'}{u'}.$$

Si in hac æquatione functiones y', u et u' cognitæ sunt, quæstio ad hoc reducitur, ut determinetur functio v atque coefficiens ejus differentialis v'. Facile enim apparet, ex solutione hujus æquationis totum calculum integralem unius quantitatis variabilis pendere. Quodcumque enim integrale, abstractione facta constantis arbitrariæ, ex duobus factoribus compositum censere possumus, quorum vel ambo variabiles sunt, vel alter variabilis et alter constans. Si igitur ponimus y' esse coefficientem differentialem functionis cujusdam y, atque pro u eligatur functio quædam formæ determinatæ, u' per differentiationem ipsius u cognitum erit. Si igitur hæ functiones in æquatione nuper allata loco y, u et u' substituuntur, apparet $\int y'dx$ h. e. y cognitum esse, si v determinare queamus. Est enim $y'dx = d.uv$ et hanc ob caussam erit $\int y'dx = uv + const.$

Etiamsi æquatio $v + \frac{u}{u'}v' = \frac{y'}{u'}$ generali modo non est solubilis, existit tamen casus, ubi valor ipsius v facillime determinatur. Accidere enim po-

test ut sit $\frac{y'}{u'}$ constans, quo fit, ut æquationi satisfiat, si ponimus $v = \frac{y'}{u'}$. Quando enim est $v = const.$, erit $v' = o$. Substituto igitur valore ipsius v, æquatio nostra erit $\frac{y'}{u'} = \frac{y'}{u'}$. Si igitur alterum factorem u integralis quæsiti ita determinare possumus, ut sit $\frac{y'}{u'}$ constans, erit v ideoque integrale ipsum cognitum. Constat enim esse $\int y' dx = \frac{y'}{u'} u + const.$

Mutetur jam $\frac{u}{u'}$ in P et $\frac{y'}{u'}$ in Q, unde

$$v + Pv' = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si Q non est constans, et æquatio hæc differentiatur, obtinemus $dv + v' dP + Pdv' = dQ$, quam quidem æquationem, si ponimus $dP = P' dx$, $dv' = v'' dx$ et $dQ = Q' dx$, in hanc transformare possumus

$$v' + \frac{P}{P'+1} v'' = \frac{Q'}{P'+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jam si ponimus $\frac{P}{P'+1} = P_1$, $\frac{Q'}{P'+1} + Q_1$, $dP_1 = P'_1 dx, dQ_1 = Q'_1 dx$ et $dv'' = v''' dx$, iterata differentiatione obtinetur

$$v'' + \frac{P_1}{P'_1+1} v''' = \frac{Q'_1}{P'_1+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Simili modo ceteræ æquationes, coefficientes differentiales functionis v ordinum sublimiorum continentes, obtinentur. De his æquationibus ex differentiatione ortis idem valet atque de æquatione $v + Pv' = Q$. Quando enim terminus, in dextero æquationis membro constans est, terminus primus erit cognitus. Si igitur in æquatione (3) $\frac{Q'_1}{P'_1+1}$ constans est, erit

$v'' = \frac{Q'_1}{P'_1+1}$. Jam si hic valor in æquatione (2) substituitur, erit v' cognitum, et si jam valor ipsius v' in æquatione $v + Pv' = Q$ introducitur, determinatur functio v, quo facto integrale facillime obtinetur.

Ut exemplo quæ nuper attulimus illustremus, ponatur $d.uv = x(x+a)dx$, unde $y' = x(x+a)$. Jam si statuimus alterum factorem integralis y esse x, erit $u = x$ et $u' = 1$, unde $P = x$ et $Q = x(x+a)$. Æquatio igitur (1) erit

$$v + xv' = x(x+a).$$

Porro erit $P' = 1$ et $Q' = 2x + a$, unde æquatio (2) erit

$$v' + \frac{x}{2}\, v'' = \frac{2x+a}{2}.$$

Jam est $P_1 = \frac{x}{2}$ et $Q_1 = \frac{2x+a}{2}$, unde $P'_1 = \frac{1}{2}$, $Q'_1 = 1$, et $P'_1 + 1 = \frac{3}{2}$. Æquatio igitur (3) erit sequens:

$$v'' + \frac{x}{3}\, v''' = \frac{2}{3}.$$

Quoniam jam terminus in dextero membro æquationis constans est, apparet v'' huic termino æquale essse. Est igitur $v'' = \frac{2}{3}$. Si jam hic valor in æquatione antecedente introducitur erit $v' = \frac{2x+a}{2} - \frac{x}{3} = \frac{4x+3a}{6}$. Hoc denique valore in æquatione $v + xv' = x(x+a)$ substituto, obtinetur $v = x(x+a) - \frac{x(4x+3a)}{6} = \frac{2x^2+3ax}{6}$. Antea autem posuimus $u = x$, unde $uv = \frac{x^2(2x+3a)}{6}$ et $\int x(x+a)\,dx = \frac{x^2(2x+3a)}{6} + const.$ Hoc igitur modo sola differentiatione integrale inveniri potest.